NOM : Bluche	**PRENOM :** Théodore	**CLASSE :** MP1
Concours présenté : Centrale - Supélec		**Epreuve :** Maths I

<u>Nom de l'examintateur et commentaires éventuels :</u>

M. Keller. Pas sympa.

<u>Sujet :</u>

$Soit\ N_0(P) \leq nombre\ de\ zéros\ distincts\ du\ polynôme\ P$

$A, B, C \in \mathbb{C}[X]\ des\ polynômes\ de\ degré\ supérieur\ à\ 1\ tels\ que :$

$A+B+C=0\ et\ pgcd(A, B, C)=1$

$on\ pose\ A=\lambda \prod_{i=1}^{a}(X-x_i)^{\alpha_i}\ B=\mu \prod_{j=1}^{b}(X-y_j)^{\beta_j}\ C=\nu \prod_{k=1}^{c}(X-z_k)^{\gamma_k}$

$Avec\ tous\ les\ x_i\ distincts, \alpha_i \in \mathbb{N}\ etc..$

$1.\ F=\frac{A}{C} \quad G=\frac{B}{C}$

$Monter\ que\ \frac{F'}{F}=\sum_{i=1}^{a}\frac{\alpha_i}{X-x_i}-\sum_{k=1}^{c}\frac{\gamma_k}{X-z_k}$

$Calculer\ de\ même\ \frac{G'}{G}$

$2.\ On\ pose\ D_o=\prod_{i=1}^{a}(X-x_i)\cdot\prod_{j=1}^{a}(X-y_j)\cdot\prod_{k=1}^{c}(X-z_k)$

$(a)\ montrer\ que\ \frac{D_oF'}{F}\ et\ \frac{D_oG'}{G}\ sont\ des\ polynômes\ et\ que\ \frac{B}{A}=\frac{-\frac{D_oF'}{F}}{\frac{D_oG'}{G}}$

$(b)\ montrer\ que\ max(degA, degB) \leqslant max(deg\frac{D_oF'}{F}, deg\frac{D_oG'}{G})$

$(c)\ montrer\ que\ max(degA, degB) \leqslant N_o(ABC)-1$

$(d)\ en\ déduire\ que\ max(degA, degB, degC) \leqslant N_o(ABC)-1$

$3,4.\ Je\ n'ai\ pas\ eu \leq temps\ de\ traiter\ ces\ questions, cela\ parlait\ de\ grand\ théorème\ de\ Fermat$

<u>Indications éventuellement données par l'examinateur :</u>

Question 2.a)

$Poser\ U=\frac{D_oF'}{F}\ et\ V=\frac{D_oG'}{G}\ et\ montrer\ que$

$pgcd(A, B, C)=1\ et\ A+B+C=0 \Rightarrow pgcd(A, B)=1\ pour\ appliquer\ un\ théorème\ de\ Gauss$